



2. 선형변환과 행렬

2.5. 좌표변환 행렬

정리 2.22.

Finite dimensional vector space V 의 두 순서기저 β, β' 에 대하여 $Q = [I_v]_{\beta'}^{\beta}$ 라 하자. 다음이 성립한다.

1. Q is invertible
2. 임의의 $v \in V$ 에 대하여 $[v]_{\beta} = Q[v]_{\beta'}$ 이다.

정리 2.22.에서 정의된 행렬 $Q = [I_v]_{\beta'}^{\beta}$ 을 좌표변환 행렬이라 한다. 또한 정리 2.22.(2)에 의해 Q 는 β' 좌표를 β 좌표로 변환한다고 한다.

$\beta = \{x_1, \dots, x_n\}, \beta' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ 에 대하여 $x'_j = \sum_{i=1}^n Q_{ij}x_i$ 이므로 Q 의 j 열은 $[x'_j]_{\beta}$ 이다.

Q^{-1} 는 β 좌표를 β' 좌표로 옮긴다.

Vector space V 에서 자기 자신으로 가는 선형변환을 V 의 선형연산자(linear operator)라 한다. 선형연산자 T 는 V 의 순서기저 β, β' 에 대하여 $[T]_{\beta}, [T]_{\beta'}$ 으로 표현되고, 이 행렬 사이의 관계는 다음과 같다.

정리 2.23.

Finite dimensional vector space V 의 linear operator T 와 V 의 순서기저 β, β' 을 생각하자. $Q = [I_v]_{\beta'}^{\beta}$ 라 하면 다음이 성립한다.

- $[T]_{\beta'} = Q^{-1}[T]_{\beta}Q$

따름정리.

$A \in M_{n \times n}(R)$ 과 R^n 의 순서기저 γ 에 대하여 다음이 성립한다.

- $[L_A]_{\gamma} = Q^{-1}AQ$

(* $A = [L_A]_{\alpha}^{\alpha}$, α 는 R^n 의 표준순서기저)

이때 $n \times n$ 행렬 Q 의 j 열은 γ 의 j 번째 벡터이다.

정의

A, B 가 $M_{n \times n}(R)$ 의 행렬이라 하자. $B = Q^{-1}AQ$ 인 invertible matrix Q 가 존재하면 B 는 A 와 서로 닮음(similar, $A \sim B$)이다.

연습문제

- Prove that “is similar to” is an equivalence relation on $M_{n \times n}(R)$



3. 기본행렬연산과 연립일차방정식

3.1. 기본행렬연산과 기본행렬

정의

$m \times n$ 행렬 A 에 대하여 A 의 행에 대한 다음 세 연산을 기본행연산(elementary row operation)이라 한다. / 열(elementary column operation)에 대해서도 마찬가지.

1. Row interchange: A 의 두 행을 교환하는 것
2. Constant multiple: A 의 한 행에 영이 아닌 스칼라를 곱하는 것
3. Row replacement: A 의 한 행에 다른 행의 스칼라 배를 더하는 것

정의

$n \times n$ 기본행렬(elementary matrix)은 항등행렬 I_n 에 기본연산을 적용하여 얻은 행렬이다.

정리 3.1.

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 기본행[열]연산을 하여 행렬 B 를 얻었다면, $B = EA$ [$B = AE$]가 되는 $m \times m$ [$n \times n$] 기본행렬 E 가 존재한다.

정리 3.2.

Elementary matrices are invertible, and the inverse of an elementary matrix is an elementary matrix of the same type.

Inverse operations(Row operation on E that reproduces I)

1. Interchange rows i and j
2. Multiply row i by $1/c$
3. Add $-c$ times row i to row j

연습문제

- 2번

- 3번
- Let A be an $m \times n$ matrix. Prove that there exists a sequence of elementary row operations of types 1 and 3 that transforms A into an upper triangular matrix.

3.2. 행렬의 랭크와 역행렬

정의

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 A 의 rank는 linear transformation $L_A : R^n \rightarrow R^m$ 의 rank로 정의하고 $\text{rank}(A)$ 라 표기한다.

$n \times n$ 행렬이 invertible이기 위한 필요충분조건은 행렬의 rank가 n 인 것이다.

정리 3.3.

Finite vector spaces 사이에서 정의된 linear transformation $T : V \rightarrow W$ 와 V, W 각각의 순서기저 β, γ 에 대하여 $\text{rank}(T) = \text{rank}([T]_{\beta}^{\gamma})$ 이다.

정리 3.4.

$m \times n$ 행렬 A , $m \times m$ 가역행렬 P , $n \times n$ 가역행렬 Q 에 대하여 다음이 성립한다.

1. $\text{rank}(AQ) = \text{rank}(A)$
2. $\text{rank}(PA) = \text{rank}(A)$
3. $\text{rank}(PAQ) = \text{rank}(A)$

따름정리.

행렬의 elementary row[column] operations는 rank를 보존한다.

정리 3.5.

임의의 행렬의 rank는 L.I.인 열의 최대 개수와 같다.

행렬의 rank는 그 열에 의해 생성된 subspace의 dimension이다.

정리 3.6.

rank가 r 인 $m \times n$ 행렬 A 를 생각하자. $r \leq m, r \leq n$ 이 성립하고 기본행[열]연산을 유한번 사용하여 A 를 다음과 같은 꼴로 바꿀 수 있다.

$$D = \begin{pmatrix} I_r & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}$$

따름정리 1.

rank가 r 인 $m \times n$ 행렬 A 에 대하여 다음을 만족하는 $m \times m$ 가역행렬 B 와 $n \times n$ 가역행렬 C 가 존재한다.

$$D = \begin{pmatrix} I_r & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix} = BAC$$

따름정리 2.

$m \times n$ 행렬 A 에 대해 다음이 성립한다.

1. $rank(A^t) = rank(A)$
2. 임의의 행렬의 rank는 L.I.인 행의 최대 개수와 같다. 행렬의 rank는 그 행에 의해 생성된 subspace의 dimension 이다.
3. 임의의 행렬의 행과 열은 dimension이 같은 subspace를 생성한다. Dimension은 행렬의 rank와 같다.

따름정리 3.

모든 invertible matrix는 elementary matrices의 곱으로 나타낸다.

정리 3.7.

Finite dimensional vector space V, W, Z 사이에 정의된 linear transformation $T : V \rightarrow W, U : W \rightarrow Z$ 와 행렬곱 AB 를 정의하는 두 행렬 A, B 에 대하여 다음이 성립한다.

1. $rank(UT) \leq rank(U)$
2. $rank(UT) \leq rank(T)$
3. $rank(AB) \leq rank(A)$
4. $rank(AB) \leq rank(B)$

역행렬

정의

$m \times n$ 행렬 A 와 $m \times p$ 행렬 B 에 대하여 첨가행렬(augmented matrix) $(A|B)$ 는 $m \times (n+p)$ 행렬 $(A \ B)$ 이다.

A 가 $n \times n$ 가역행렬이면 행렬 $(A|I_n)$ 에 elementary row operations를 유한 번 적용하여 $(I_n|A^{-1})$ 로 변형할 수 있다.

역으로, $n \times n$ 가역행렬 A 에 대하여, 첨가행렬 $(A|I_n)$ 에 elementary row operations를 유한 번 적용하여 $(I_n|B)$ 로 변형할 수 있으면 $B = A^{-1}$ 이다.

가역이 아닌 $n \times n$ 행렬 A 에 대하여, $(A|I_n)$ 에 elementary row operations를 적용하여 $(I_n|B)$ 꼴로 변형을 시도하면 성공하지 못하고 처음 n 개 성분이 모두 0인 행을 가진 행렬을 얻게 된다.

연습문제

- Suppose that A and B are matrices having n rows. Prove that $M(A|B) = (MA|MB)$ for any $m \times n$ matrix M .

3.3. 연립일차방정식 : 이론적 측면

다음과 같은 형태의 연립방정식을 system of m linear equations in n unknowns over the field of R 이라 한다.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

다음 $m \times n$ 행렬을 연립일차방정식의 계수행렬(coefficient matrix)이라 한다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

연립일차방정식은 하나의 matrix equation으로 나타낼 수 있다: $Ax = b$

$As = b$ 인 n -tuple s 를 연립일차방정식의 해(solution)라 한다.

연립일차방정식의 모든 해들의 집합을 이 연립일차방정식의 해집합(solution set)이라 한다. 연립일차방정식의 해집합이 공집합이 아니면 이 연립일차방정식을 consistent라 하며, 그렇지 않은 경우 inconsistent라고 한다.

정의

A system $Ax = b$ of m linear equations in n unknowns는 $b=0$ 일 때 homogeneous라 한다. Otherwise the system is said to be nonhomogeneous.

정리 3.8.

Let $Ax = 0$ be a homogeneous system of m linear equations in n unknowns over a field R . $Ax = 0$ 의 해집합을 K 라 할 때, $K = N(L_A)$ 이다.

즉 K 는 R^n 의 subspace이고 dimension은 $n - \text{rank}(L_A) = n - \text{rank}(A)$ 이다.

따름정리.

$m < n$ 이면 연립방정식 $Ax = 0$ 은 영벡터가 아닌 해가 있다.

정리 3.9.

K 를 consistent한 연립일차방정식 $Ax = b$ 의 solution set, K_H 를 대응하는 homogeneous system $Ax = 0$ 의 solution set이라 하자. $Ax = b$ 의 임의의 해를 s 라 하면 다음이 성립한다.

$$K = \{s\} + K_H = \{s + k : k \in K_H\}$$

정리 3.10.

Let $Ax = b$ be a system of n linear equations in n unknowns. 행렬 A 가 invertible이면 이 연립일차방정식은 유일한 해 $A^{-1}b$ 가 있다.

역으로, 이 방정식의 해가 유일하면 행렬 A 는 invertible이다.

정리 3.11.

연립일차방정식 $Ax = b$ 이 consistent이기 위한 필요충분조건은 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$ 인 것이다.

3.4. 연립일차방정식 : 계산적 측면

정의

두 연립일차방정식의 해집합이 서로 같을 때, 두 연립일차방정식은 동치(equivalent)라 한다.

정리 3.13.

n 개의 미지수와 m 개의 일차방정식으로 이루어진 연립일차방정식 $Ax = b$ 와 invertible $m \times m$ 행렬 C 에 대하여 다음 두 연립일차방정식은 동치이다.

- $Ax = b$
- $(CA)x = Cb$

따름정리.

n 개의 미지수와 m 개의 일차방정식으로 이루어진 연립일차방정식 $Ax = b$ 를 생각하자. $(A|b)$ 에 elementary row operation을 유한 번 적용하여 $(A'|b')$ 를 얻을 수 있다면 $A'x = b'$ 은 처음 주어진 연립일차방정식과 동치이다.

연립일차방정식을 푸는 법

1. 가장 왼쪽에 있는, 영이 아닌 열에서 1행의 성분을 1로 바꾼다.
2. 1행에 적절한 스칼라를 곱하여 나머지 행에 더하는 type 3 elementary row operation을 적용하여 가장 왼쪽에 위치한 열의 나머지 성분들을 모두 0으로 만든다.
3. 직전 행에 영향을 주지 않는 범위에서, 그 다음 행의 가장 왼쪽 열에 있는 성분을 1로 만든다.
4. type 3 elementary row operation을 사용하여 직전에 얻은 1 아래에 위치한 성분을 0으로 만든다.
5. 0으로 이루어진 행만 나올 때까지(각 행에서 처음으로 0이 아닌 성분 아래 0만 위치하도록) 각 행마다 과정 3, 4를 반복한다.
6. 마지막으로 0이 아닌 행에서 시작하여 위로 거슬러 올라가면서 각 행에 스칼라를 곱하여 위의 행에 더한다.
7. 과정 6을 2행까지 계속 반복하면 소거를 완료할 수 있다.

정의

다음 세 조건을 만족하는 행렬을 RREF(reduced row echelon form)라 한다.

1. 0이 아닌 성분을 가지는 행은 모든 성분이 0인 행보다 위에 위치한다. (만약 모든 성분이 0인 행이 존재한다면)
 2. 각 행의 처음으로 0이 아닌 성분은 그 성분을 포함한 열에서 유일하게 0이 아닌 성분이다.
 3. 각 행의 처음으로 0이 아닌 성분은 1이고, 이전 행의 처음으로 0이 아닌 성분보다 오른쪽에 위치한다.
-

첨가행렬을 RREF로 바꾸는 과정을 가우스 소거법(Gaussian elimination)이라 한다. 이 과정은 두 부분으로 나눌 수 있다.

1. (과정 1~5) 위에서 아래로 내려가면서 upper triangle matrix로 만든다.
2. (과정 6~7) 아래에서 위로 거슬러 올라오면서 각 행의 최초로 0이 아닌 성분이 그 열에서 유일하게 0이 아닌 성분인 RREF로 만든다.

정리 3.14.

가우스 소거법은 임의의 행렬을 RREF로 바꾸어 준다.

정리 3.15.

$Ax = b$ 를 n 개의 미지수와 r 개의 영이 아닌 방정식으로 이루어진 연립일차방정식이라 하자. $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$ 이고, $(A|b)$ 가 RREF이면 다음이 성립한다.

1. $\text{rank}(A) = r$
2. 앞선 과정을 거쳐 얻은 일반해가 다음과 같은 꼴이라고 하자.

$$s = s_0 + t_1 u_1 + t_2 u_2 + \dots + t_{n-r} u_{n-r}$$

이때, $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-r}\}$ 는 대응하는 동차 연립일차방정식의 해집합의 기저이고, s_0 은 처음 연립일차방정식의 해이다.

RREF에 대한 해석

$m \times n$ 행렬 A 의 열을 $a_1, \dots, a_n$ 이라 하고, A 의 RREF B 에 대하여 B 의 열을 $b_1, \dots, b_n$ 이라 표기하자. A 의 rank가 r 면 정리 3.4.의 따름정리에 의해 B 의 랭크도 r 다.

B 는 RREF이므로 B 의 영이 아닌 행은 다른 행의 일차결합으로 나타낼 수 없다. 따라서 B 는 영이 아닌 행이 정확히 r 개 있다.

$r \geq 1$ 일 때, B 의 열을 따라 벡터 $e_1, \dots, e_r$ 가 반드시 나타난다. $i = 1, 2, \dots, r$ 에 대하여 $b_{j_i} = e_i$ 인 지표 j_i 가 존재한다. B 의 이 열들에 대응하는 A 의 열을 $a_{j_1}, \dots, a_{j_r}$ 라 할 때, 이 열들은 L.I. 이다.

$m \times m$ 가역행렬 M 이 존재하여 $MA = B$ 이고, B 는 오직 r 개의 영이 아닌 행을 가지므로 B 의 모든 열은 다음과 같은 꼴이다. $(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)^T$. 이때 A 의 대응하는 열은 다음과 같은 꼴이다. $M^{-1}(d_1 e_1 + \dots + d_r e_r) = d_1 a_{j_1} + \dots + d_r a_{j_r}$

정리 3.16.

rank가 r 인 $m \times n$ 행렬 A 에 대하여 (단, $r > 0$) RREF를 B 라 하면 다음이 성립한다.

1. B 의 영이 아닌 행의 개수는 r 이다.
2. 각 $i = 1, 2, \dots, r$ 에 대하여 $b_{j_i} = e_i$ 인 B 의 열 b_{j_i} 가 존재한다.

3. A 의 $j_1, \dots, j_r$ 열은 L.I.이다.
4. 각 $k = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 B 의 k 열이 $d_1 e_1 + \dots d_r e_r$ 면 A 의 k 열은 $d_1 a_{j_1} + \dots + d_r a_{j_r}$ 다.



4. 행렬식

4.1. 2차 정사각행렬의 행렬식

정의

체 R 의 원소를 성분으로 하는 2×2 행렬 A 가 다음과 같다고 하자.

»

스칼라 $ad - bc$ 를 A 의 행렬식(determinant)라 하며, $\det(A)$ 또는 $|A|$ 라 표기한다.

정리 4.1.

함수 $\det : M_{2 \times 2}(R) \rightarrow F$ 는 2×2 행렬의 다른 행이 고정되어 있을 때, 행렬의 각 행에 대하여 linear이다. 즉, $u, v, w \in R^2$ 과 스칼라 k 에 대하여 다음 두 식이 성립한다.

1. $\det \begin{pmatrix} u + kv \\ w \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + k \cdot \det \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$
2. $\det \begin{pmatrix} w \\ u + kv \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} + k \cdot \det \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$

정리 4.2.

행렬 $A \in M_{2 \times 2}(R)$ 에 대하여 A 의 $\det$ 이 0이 아니기 위한 필요충분조건은 A 가 invertible 인 것이다. 특히 A 가 invertible이면 역행렬은 다음과 같다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

4.2. n 차 정사각행렬의 행렬식

$n \geq 2$ 일 때, 행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 A 의 i 행과 j 열을 지워서 얻은 $(n - 1) \times (n - 1)$ 행렬을 $\tilde{A}_{ij}$ 라 한다.

정의

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 $\det(A)$ 를 다음과 같이 귀납적으로 정의하자. (단, $n=1$ 일 때 $A = (A_{11}), \det(A) = A_{11}$)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} A_{1j} \cdot \det(\tilde{A}_{1j})$$

- 스칼라 $\det(A)$ 는 A 의 행렬식(determinant)라 하며, $|A|$ 라 표기한다.
- 스칼라 $(-1)^{1+j} \cdot \det(\tilde{A}_{1j})$ 는 A 의 i 행 j 열 성분에 대한 여인수(cofactor)라 한다.

A 의 i 행 j 열 성분에 대한 cofactor를 $c_{ij} = (-1)^{1+j} \cdot \det(\tilde{A}_{1j})$ 라 표기하면 A 의 $\det$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\det(A) = A_{11}c_{11} + A_{12}c_{12} + \dots + A_{1n}c_{1n}$$

즉, A 의 $\det$ 는 (A 의) 1행의 각 성분에 cofactor를 곱하여 더한 것이다. 위 공식은 A 의 1행에 대한 여인수 전개(cofactor expansion)이라 한다.

2×2 행렬에 대하여 cofactor expansion으로 정의한 행렬식과 4.1절에서 다룬 행렬식의 정의는 서로 같다.

정리 4.3.

$n \times n$ 행렬의 $\det$ 는 나머지 행이 고정되어 있을 때, 행렬의 각 행에 대하여 linear이다. 즉 $1 \leq r \leq n$ 인 r 에 대하여 다음 식이 성립한다. 이때 k 는 스칼라이고, u, v 와 각 a_i 는 행벡터 ($\in R^n$)이다.

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ u + kv \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ u \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + k \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ v \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

따름정리

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 의 어느 행의 모든 성분이 0이면 $\det(A) = 0$ 이다.

정리 4.4.

정사각행렬의 $\det$ 는 임의의 행에 대하여 cofactor expansion하여 구할 수 있다. 즉 $A \in M_{n \times n}(R)$ 와 임의의 정수 $i(1 \leq i \leq n)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} A_{ij} \cdot \det(\tilde{A}_{ij})$$

따름정리

$A \in M_{n \times n}(R)$ 의 두 행이 같으면 $\det(A) = 0$ 이다.

정리 4.5.

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 의 두 행을 교환하여 얻은 행렬을 B 라 할 때, $\det(B) = -\det(A)$ 이다.

정리 4.6.

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 와 A 의 한 행에 다른 행의 스칼라배를 더하여 얻은 행렬을 B 라 하자. 이때, $\det(B) = \det(A)$ 이다.

따름정리.

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 의 rank가 n 미만이면 $\det(A) = 0$ 이다.

elementary row operation이 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 미치는 영향을 정리하면 다음과 같다.

1. Type 1: $\det(B) = -\det(A)$
2. Type 2: $\det(B) = k \cdot \det(A)$
3. Type 3: $\det(B) = \det(A)$

상삼각행렬의 행렬식은 대각성분의 곱과 같다. 임의의 정사각행렬은 type 1 & 3 elementary row operation 만을 적용하여 상삼각행렬로 바꿀 수 있으므로 $\det$ 를 쉽게 계산할 수 있다.

연습문제

- 다음 식을 만족하는 k 의 값을 구하라.

$$\det \begin{pmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

- 다음 식을 만족하는 k 의 값을 구하라.

$$\det \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 3b_1 + 5c_1 & 3b_2 + 5c_2 & 3b_3 + 5c_3 \\ 7c_1 & 7c_2 & 7c_3 \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

- 임의의 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 $\det(kA) = k^n \det(A)$ 임을 증명하라.
- 행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 $\det(-A) = \det(A)$ 가 성립할 조건을 구하라.

4.3. 행렬식의 성질

Identity matrix의 $\det$ 는 1이므로 elementary matrix의 $\det$ 에 관해 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

1. I 의 두 행의 위치를 바꾸어 얻은 E 에 대하여 $\det(E) = -1$ 이다.
2. I 의 한 행에 영이 아닌 스칼라 k 를 곱하여 얻은 E 에 대하여 $\det(E) = k$ 이다.
3. I 의 한 행에 다른 행의 스칼라 배를 더하여 얻은 E 에 대하여 $\det(E) = 1$ 이다.

정리 4.7.

임의의 $A, B \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ 이다.

따름정리.

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 가 invertible이기 위한 필요충분조건은 $\det(A) \neq 0$ 이다. 특히, A 가 invertible이면 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ 이다.

정리 4.8.

임의의 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 $\det(A^t) = \det(A)$ 이다.

정리 4.9 (Cramer's Rule).

$Ax = b$ 를 n 개의 미지수를 가진 n 개의 연립일차방정식의 행렬표현이라 하자. (단, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$)

$\det(A) \neq 0$ 일 때, 이 연립방정식은 다음과 같은 유일한 해가 있다.

$$x_k = \frac{\det(M_k)}{\det(A)}$$

이때, 각 k ($k = 1, 2, \dots, n$)에 대하여 M_k 는 A 의 k 열을 b 로 바꾸어 얻은 $n \times n$ 행렬이다.

임의의 순서집합 $\{u, v\} \in R^2$ 에 대응하는 평행사변형을 다음과 같이 생각하자. u, v 를 R^2 의 원점을 시점으로 하는 유향선분이라 생각하자. 이웃한 두 변 u, v 를 가지는 평행사변형을 u 와 v 로 결정되는 평행사변형(parallelogram)이라 한다.

집합 $\{u, v\}$ 가 linearly dependent(u 와 v 가 평행)이면, u 와 v 로 결정되는 평행사변형은 선분으로 퇴화하여 그 넓이는 0이 된다.

집합 $\{u, v\}$ 가 linearly independent이면, 평행사변형의 넓이는 $|\det \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}|$ 와 같다.

벡터 a_1, a_2, a_3 을 이웃한 세 변으로 가지는 나란히꼴의 부피는 $|\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}|$ 이다.

연습문제

- 어떤 자연수 k 에 대하여 $M^k = O$ 인 행렬 $M \in M_{n \times n}(R)$ 를 nilpotent matrix(멱영행렬)라 한다. (O 는 $n \times n$ 영행렬) M 이 nilpotent이면 $\det(M) = 0$ 임을 증명하라.
- $M^t = -M$ 인 행렬 $M \in M_{n \times n}(C)$ 를 skew-symmetric matrix(반대칭행렬)라 한다. n 이 홀수일 때, skew-symmetric matrix M 은 invertible이 아님을 증명하라. n 이 짝수일 때는 어떻게 될지 설명하라.
- $QQ^t = I$ 인 행렬 $Q \in M_{n \times n}(R)$ 를 orthogonal matrix(직교행렬)라 한다. Q 가 orthogonal이면 $\det(Q) = \pm 1$ 임을 증명하라.
- 두 행렬 $A, B \in M_{n \times n}(R)$ 가 similar이면 $\det(A) = \det(B)$ 임을 증명하라.
- A 와 C 가 square matrix일 때, 다음과 같은 꼴인 행렬 $M \in M_{n \times n}(R)$ 를 생각하자. $\det(M) = \det(A) \cdot \det(C)$ 임을 증명하라.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$



5. 대각화

5.1. 고윳값과 고유벡터

정의

Finite-dimensional vector space V 에서 정의된 linear operator T 에 대하여

- $[T]_{\beta}$ 가 diagonal matrix가 되도록 하는 (V 의) ordered basis β 가 존재할 때, linear operator T 는 대각화가능(diagonalizable)하다고 한다.
- L_A 가 diagonalizable일 때, square matrix A 는 대각화가능(diagonalizable)하다고 한다.

$[T]_{\beta}$ 가 diagonal matrix가 되도록 하는 ordered basis

$[T]_{\beta} D = [T]_{\beta}$ 가 diagonal matrix라 하자. 각 벡터 $v_j \in \beta$ 에 대하여 $T(v_j) = \sum_{i=1}^n D_{ij} v_i = D_{jj} v_j = \lambda_j v_j$ 가 성립한다. (단, $\lambda_j = D_{jj}$)

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

정의

Vector space V 의 linear operator T 에 대하여

- 영벡터가 아닌 벡터 $v \in V$ 와 어떤 스칼라 λ 가 존재하여 $T(v) = \lambda v$ 를 만족할 때, 벡터 v 를 T 의 고유벡터(eigenvector)라 한다.

- 스칼라 λ 를 eigenvector v 에 대응하는 고윳값(eigenvalue)이라 한다.

$M_{n \times n}(R)$ 에 속하는 행렬 A 에 대하여

- L_A 의 eigenvector, 즉 $Av = \lambda v$ 인 스칼라 λ 가 존재하게 만드는 영벡터가 아닌 벡터 $v \in R^n$ 을 A 의 eigenvector라 한다.
- 스칼라 λ 를 eigenvector v 에 대응하는 행렬 A 의 eigenvalue라 한다.

→ 어떤 벡터가 행렬 A 의 eigenvector이기 위한 필요충분조건은 그 벡터가 L_A 의 eigenvector인 것이다.

→ 스칼라 λ 가 행렬 A 의 eigenvalue이기 위한 필요충분조건은 스칼라 λ 가 L_A 의 eigenvalue인 것이다.

정리 5.1.

Finite-dimensional vector space V 의 linear operator T 가 diagonalizable이기 위한 필요충분조건은 T 의 eigenvector로 이루어진 (V 의) ordered basis β 가 존재하는 것이다.

또한 T 가 diagonalizable이면 $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ 은 T 의 eigenvector로 이루어진 ordered basis이며, $D = [T]_\beta$ 는 diagonal matrix이다. 이때, $D_{jj} (1 \leq j \leq n)$ 은 v_j 에 대응하는 eigenvalue이다.

따름정리.

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 이 diagonalizable이기 위한 필요충분조건은 A 의 eigenvector로 이루어진 (R^n 의) ordered basis가 존재하는 것이다.

또한 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 은 A 의 eigenvector로 이루어진 (R^n 의) ordered basis이고 j 열이 벡터 v_j 인 $n \times n$ 행렬 Q 에 대하여 $D = Q^{-1}AQ$ 는 D_{jj} 가 v_j 에 대응하는 (A 의) eigenvalue인 diagonal matrix이다. 즉, 행렬 A 가 diagonalizable이기 위한 필요충분조건은 diagonal matrix와 similar인 것이다.

정리 5.2.

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 스칼라 λ 가 A 의 eigenvalue이기 위한 필요충분조건은 $\det(A - \lambda I_n) = 0$ 이다.

정의

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 다항식 $f(t) = \det(A - tI_n)$ 을 A 의 특성다항식(characteristic polynomial)이라 한다.

같은 행렬끼리는 서로 같은 $\det$ 와 특성다항식을 가진다.

정의

Finite-dimensional vector space V 에서 정의된 linear operator T 를 생각하자. V 의 임의의 ordered basis β 에 대하여 $A = [T]_\beta$ 의 $\det$ 를 T 의 행렬식(determinant)이라 하고 $\det(T)$ 라 표기한다. 또한 행렬 A 의 특성다항식 $f(t) = \det(A - tI_n)$ 을 T 의 특성다항식(characteristic polynomial)이라 한다.

정리 5.3.

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

1. A 의 특성다항식은 n 차 다항식이고, 최고차항의 계수는 $(-1)^n$ 이다.
2. A 에는 최대 n 개의 서로 다른 고윳값이 있다.

정리 5.4.

행렬 $A \in M_{n \times n}(R)$ 와 eigenvalue λ 에 대하여 벡터 $v \in R^n$ 이 λ 에 대응하는 (A 의) eigenvector이기 위한 필요충분조건은 $v \neq 0$ 이고 $(A - \lambda I)v = 0$ 인 것이다.

연습문제

- 다음 물음에 답하라.
 - Finite-dimensional vector space에서 정의된 linear operator T 가 invertible이기 위한 필요충분조건은 T 의 eigenvalue가 0이 아닌 것임을 증명하라.
 - Linear operator T 가 invertible일 때, 스칼라 λ 가 T 의 eigenvalue이기 위한 필요충분조건은 λ^{-1} 가 T^{-1} 의 eigenvalue인 것임을 증명하라.
- Upper triangle matrix M 의 eigenvalues는 M 의 diagonal entries임을 증명하라.
- 닮은 행렬은 같은 특성다항식을 가짐을 증명하라.
- 임의의 square matrix A 에 대하여 A 와 A^t 의 특성다항식은 같음을 증명하라. (따라서 eigenvalue도 같다.)
- Vector space V 와 linear operator T 와 eigenvalue λ 에 대응하는 (T 의) eigenvector x 를 생각하자. 임의의 자연수 m 에 대하여 x 는 eigenvalue λ^m 에 대응하는 (T^m 의) 고유벡터임을 증명하라.
- $M_{n \times n}(R)$ 의 linear operator $T(A) = A^t$ 에 대한 다음 물음에 답하라.
 - T 의 eigenvalue는 ± 1 뿐임을 증명하라.
 - T 의 각 eigenvalue에 대응하는 eigenvector를 구하라.
- $n \times n$ 행렬 A 와 특성다항식 $f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ 에 대한 다음 물음에 답하라.

- $f(0) = a_0 = \det(A)$ 임을 증명하라.
- 이로부터 A 가 invertible이기 위한 필요충분조건은 $a_0 \neq 0$ 임을 확인하라.

5.2. 대각화 가능성

정리 5.5.

Vector space의 linear operator T 와 T 의 서로 다른 eigenvalue $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 를 생각하자. 각 $i = 1, 2, \dots, k$ 에 대하여 λ_i 에 대응하는 (T 의) eigenvector로 이루어진 유한집합을 S_i 라 하자. 각 $S_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 가 L.I.이면 $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ 도 L.I.이다.

따름정리.

n -dimensional vector space의 linear operator T 가 서로 다른 n 개의 eigenvalue를 가지면 T 는 diagonalizable이다.

- 역은 거짓이다. T 가 diagonalizable이라고 해서 반드시 서로 다른 n 개의 eigenvalue가 있다고 할 순 없다. (예: identity operator)

정의

다음 조건을 만족하는 다항식 $f(t) \in P(R)$ 를 R 위에서 완전히 인수분해된다(splits over R)라고 한다. 이때 스칼라 $c, a_1, \dots, a_n \in F$ 중 같은 값이 있을 수도 있다.

$$f(t) = c(t - a_1)(t - a_2) \cdots (t - a_n)$$

정리 5.6.

Diagonalizable한 linear operator의 특성다항식은 R 위에서 완전히 인수분해(split over R)된다.

정의

특성다항식이 $f(t)$ 인 linear operator(또는 행렬)의 eigenvalue λ 에 대하여, $(t - \lambda)^k$ 이 $f(t)$ 의 인수가 되도록 하는 가장 큰 자연수 k 를 λ 의 중복도(multiplicity) 또는 대수적 중복도(algebraic multiplicity)라 한다.

정의

Vector space V 의 linear operator T 와 eigenvalue λ 에 대하여, 다음 집합 E_λ 를 고윳값 λ 에 대응하는 T 의 고유공간(eigenspace)이라 한다.

$$E_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\} = N(T - \lambda I_V)$$

이와 비슷하게 λ 에 대응하는 (L_A 의) eigenspace를 λ 에 대응하는 square matrix A 의 eigenspace라 한다.

정리 5.7.

Finite-dimensional vector space V 의 linear operator T 와 multiplicity가 m 인 (T 의) eigenvalue λ 에 대하여, $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m$ 이다.

정리 5.8.

Finite-dimensional vector space V 의 linear operator T 에 대하여 T 의 특성다항식이 완전히 인수분해되고 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 가 서로 다른 (T 의) eigenvalue일 때, 다음이 성립한다.

1. T 가 diagonalizable이기 위한 필요충분조건은 모든 i 에 대하여 λ_i 의 multiplicity가 $\dim(E_{\lambda_i})$ 와 같은 것이다.
2. T 가 diagonalizable이고 각각의 i 에 대하여 β_i 가 E_{λ_i} 의 ordered basis일 때, $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k$ 는 T 의 eigenvector로 이루어진 (V 의) ordered basis이다.

대각화가능 판정법

n -dimensional vector space V 의 linear operator T 가 diagonalizable이기 위한 필요충분 조건은 다음 두 조건이 모두 성립하는 것이다.

1. T 의 특성다항식이 완전히 인수분해된다.
2. T 의 eigenvalue λ 의 multiplicity가 $nullity(T - \lambda I)$ 와 같다. 즉 λ 의 multiplicity는 $n - rank(T - \lambda I)$ 이다.

T 가 diagonalizable인지 판정할 때 (V 의) basis α 를 적절하게 잡고 $B = [T]_\alpha$ 를 다루는 것이 편리하다. 조건 1, 2를 만족하면 B (와 T)는 diagonalizable이다.

Diagonalizable인 $n \times n$ 정사각행렬 A 에 대하여 정리 2.23의 따름정리를 사용하면 $Q^{-1}AQ = D$ 를 만족하는 행렬 Q, D 를 찾을 수 있다. 이때, Q 는 $n \times n$ invertible matrix이고, 각 열은 A 의 eigenvector이다. 또한 D 는 $n \times n$ diagonal matrix이고, j 번째 diagonal entry는 ' Q 의 j 열에 대응하는' A 의 eigenvalue이다.

이를 이용해 A^n 을 간단히 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} A^n &= (QDQ^{-1})^n \\ &= (QDQ^{-1})(QDQ^{-1}) \cdots (QDQ^{-1}) \\ &= QD^nQ^{-1} \end{aligned}$$

직합

정의

Vector space V 의 subspace $W_1, \dots, W_k$ 에 대하여 다음 집합을 subspace의 합(sum)이라 한다.

$$\{v_1 + \dots + v_k : v_i \in W_i \text{ for } 1 \leq i \leq k\}$$

이를 $W_1 + W_2 + \dots + W_k$ 또는 $\sum_{i=1}^k W_i$ 라 표기한다.

정의

Vector space V 의 subspace $W_1, \dots, W_k$ 를 생각하자. 모든 $i = 1, 2, \dots, k$ 에 대하여 $W_i \subseteq W$ 이고 다음을 만족하는 W 를 subspace $W_1, \dots, W_k$ 의 직합(direct sum)이라 하며 $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ 라 표기한다.

$$W_j \cap \sum_{i \neq j} W_i = \{0\} \text{ for each } j (1 \leq j \leq k)$$

정리 5.9.

Finite vector space V 의 subspace $W_1, \dots, W_k$ 에 대하여 다음 조건은 동치이다.

Theorem 5.10. *Let $W_1, W_2, \dots, W_k$ be subspaces of a finite-dimensional vector space V . The following conditions are equivalent.*

- (a) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$.
- (b) $V = \sum_{i=1}^k W_i$ and, for any vectors $v_1, v_2, \dots, v_k$ such that $v_i \in W_i$ ($1 \leq i \leq k$), if $v_1 + v_2 + \dots + v_k = 0$, then $v_i = 0$ for all i .
- (c) Each vector $v \in V$ can be uniquely written as $v = v_1 + v_2 + \dots + v_k$, where $v_i \in W_i$.
- (d) If γ_i is an ordered basis for W_i ($1 \leq i \leq k$), then $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_k$ is an ordered basis for V .
- (e) For each $i = 1, 2, \dots, k$, there exists an ordered basis γ_i for W_i such that $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_k$ is an ordered basis for V .

정리 5.10.

Finite vector space V 의 linear operator가 diagonalizable이기 위한 필요충분조건은 V 가 (T 의) eigenspace의 direct sum인 것이다.

연습문제

- Finite-dimensional vector space V 의 linear operator T 가 invertible이라 하자.
 - T 의 임의의 eigenvector λ 에 대하여 λ^{-1} 는 T^{-1} 의 eigenvector이다. λ 에 대응하는 (T 의) eigenspace는 λ^{-1} 에 대응하는 (T^{-1} 의) eigenspace와 같음을 증명하라.
 - T 가 diagonalizable이면 T^{-1} 도 diagonalizable임을 증명하라.